SOLUCIONES

1. Una función de dos variables $f(x,y)$ tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en un punto $(a,b) \in Dom(f)'$ si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $(x,y) \in Dom(f)$ y $0 < \|(x,y)-(a,b)\| < \delta$ se verifica que $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.

Se escribe $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$.

---

2. I.- $f(x,y)$ será diferenciable en $(0,0)$ si el siguiente límite es cero

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|f(x,y) - f(0,0) - (x-0)\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - (y-0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right|}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

Calculamos mediante la definición las dos derivadas parciales en $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x-0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{2y^3}{y^2} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} 2 = 2$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{2y^3}{x^2+y^2} - 0 - x\cdot 0 - y\cdot 2\right|}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{2y^3}{x^2+y^2} - 2y\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{2y^3 - 2y(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\cancel{2y^3} - 2yx^2 - \cancel{2y^3}|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|-2yx^2|}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{|-2\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\, \rho^2 \cos^2\theta|}{(\rho^2)^{3/2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^3}\,|-2\,\mathrm{sen}\,\theta \cos^2\theta|}{\cancel{\rho^3}}$$

Este límite no existe porque $|-2\,\text{sen}\,\theta\cos^2\theta|$ no es un único número real, su valor depende del ángulo θ con que se llega al origen $(0,0)$.

Por lo tanto, $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$

II.- En los puntos de $\mathbb{R}^2$ distintos del $(0,0)$ obtendremos la $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ derivando $f(x,y)=\frac{2y^3}{x^2+y^2}$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{0\cdot(x^2+y^2)-2y^3\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

Ya tenemos calculada $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, luego

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{-4xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Para ver si esta función es continua en $(0,0)$ buscamos su límite en $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-4xy^3}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{-4\rho\cos\theta\,\rho^3\,\text{sen}^3\theta}{\left[(\rho\cos\theta)^2+(\rho\,\text{sen}\,\theta)^2\right]^2}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{-4\cancel{\rho^4}\cos\theta\,\text{sen}^3\theta}{\cancel{\rho^4}}=-4\cos\theta\,\text{sen}^3\theta$$

Como no existe este límite la función $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ no es continua en $(0,0)$.

3. $g(x,y) = x^3 + y^2 - 27x - 2y + 7$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 27 = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y - 2 = 0 \end{array}\right\}$$ los puntos solución de este sistema son los puntos estacionarios de $g(x,y)$.

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2 = 27 \\ 2y = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x^2 = 9 \\ y = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \pm 3 \\ y = 1 \end{array}\right\} \quad (3,1) \text{ y } (-3,1)$$

Para clasificarlos utilizaremos la matriz hessiana

$$\left.\begin{array}{l} A = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 6x \\ B = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0 \\ C = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2 \end{array}\right\} \quad Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En $(3,1)$, $Hg(3,1) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{array}{l} AC - B^2 = 18 \cdot 2 - 0 = 36 > 0 \\ A = 18 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$g(x,y)$ tiene un mínimo relativo en $(3,1)$ que vale $g(3,1) = -48$

En $(-3,1)$ $Hg(-3,1) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $AC - B^2 = (-18) \cdot 2 - 0 = -36 < 0$

esto significa que en el punto $(-3,1)$ la función $g(x,y)$ tiene un punto de silla.

$g(-3,1) = 60$

4. La función $h(x,y) = x^2 - y^2$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

Los puntos de la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$ constituyen un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$.

El teorema de Weierstrass asegura que una función continua en un conjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ (cerrado y acotado) tiene valores máximo y mínimo absolutos.

Buscamos los máximos y mínimos de $h(x,y) = x^2 - y^2$ con la condición $\varphi(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2 = 0$.

La función de Lagrange es:

$$H(x,y) = h(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 - 2)$$

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = 2x + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = -2y + 4\lambda y = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

Los puntos estacionarios (si son puntos regulares) de la función de Lagrange corresponden a los extremos relativos de $h(x,y)$ sobre la curva condición.

$$\left.\begin{array}{r} (2+2\lambda)x = 0 \\ (-2+4\lambda)y = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

$x = 0$ satisface la 1ª ecuación

$2y^2 - 2 = 0 \Rightarrow y^2 = 1,\ y = \pm 1$

Estos valores con $-2 + 4\lambda = 0$ cumplen las tres ecuaciones del sistema

$(0,1),\ (0,-1)$

$y = 0$ satisface la 2ª ecuación

$x^2 - 2 = 0,\ x^2 = 2,\ x = \pm\sqrt{2}$

Estos valores con $2 + 2\lambda = 0$ cumplen el sistema

$(\sqrt{2}, 0)$

$(-\sqrt{2}, 0)$

Damos valores a $h(x,y)$ en los cuatro puntos hallados

$$\left.\begin{array}{l} h(0,1) = -1 \\ h(0,-1) = -1 \\ h(\sqrt{2},0) = 2 \\ h(-\sqrt{2},0) = 2 \end{array}\right\}$$

El valor máximo absoluto de $h(x,y)$ sobre los puntos de la elipse es 2 y lo alcanza la función en los puntos $(\sqrt{2},0)$ y $(-\sqrt{2},0)$.

El valor mínimo absoluto de $h(x,y)$ sobre los puntos de la elipse es -1 y se alcanza en los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$.

NOTA.- Los razonamientos anteriores son válidos en los puntos regulares de la condición. La matriz de regularidad de la función condición debe tener rango 1 ~~para que~~ en un punto para que ese punto sea regular.

$$\text{rango}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \text{rango}\left(2x, 4y\right) = 1, \ \forall (x,y) \neq (0,0)$$

Luego los cuatro puntos hallados eran puntos regulares y el método de Lagrange se ha aplicado cumpliéndose las hipótesis del teorema.

5. La longitud de un arco de curva C se calcula mediante la fórmula

$$\ell(C) = \int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1+[F'(x)]^2}\, dx$$

Podemos calcular $F'(x)$ en nuestro caso mediante el teorema fundamental del cálculo porque la función integrando $\sqrt{\cos t}$ es una función continua en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.

$\sqrt{\cos t}$ es composición de la función $\cos t \geq 0$ en el intervalo y de la función $\sqrt{t}$ definida $\forall\, t \geq 0$.

$$F'(x) = \sqrt{\cos x} \quad \text{siendo } F(x) = \int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=x} \sqrt{\cos t}\, dt$$

Por lo tanto

$$\ell(C) = \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=+\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\left(\sqrt{\cos x}\right)^2}\, dx = \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=+\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\, dx =$$

$$= \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=+\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\, dx = \sqrt{2}\int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=+\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{2}\, dx = \sqrt{2}\left[2 \cdot \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=+\frac{\pi}{2}} =$$

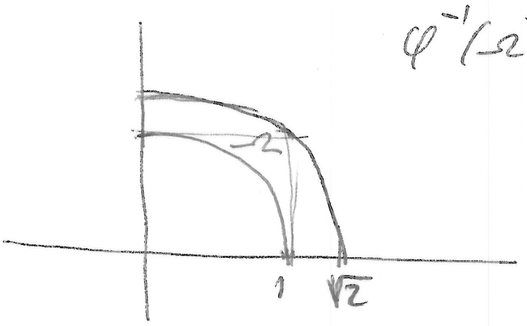
$$= \sqrt{2}\left[2 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - 2\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left[\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} - \cancel{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{2}\left[2\sqrt{2}\right] = 4 \,//$$

6.

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2+y^2 \le 2 , \ x \geq 0 , \ y \geq 0 \}$$

$$\varphi^{-1}(\Omega) = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 ; 1 \le \rho \le 2 , 0 \le \theta \le \tfrac{\pi}{2} \}$$



Utilizaremos el cambio a coordenadas polares

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\} \quad J\begin{pmatrix} x,y \\ \rho,\theta \end{pmatrix} = \rho$$

$$\iint_{\Omega} (x^2-y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{\varphi^{-1}(\Omega)} \left[(\rho\cos\theta)^2 - (\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\right]\cdot \rho \, d\rho\, d\theta = \iint_{\varphi^{-1}(\Omega)} \rho^2(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)\rho \, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\rho=1}^{\rho=\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho \right) (\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)\, d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\rho=1}^{\rho=\sqrt{2}} \cdot \cos 2\theta \, d\theta =$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{2})^4}{4} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left[\frac{\mathrm{sen}\, 2\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{sen}\,\pi}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,0}{2}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{4}\right)(0-0) = 0 \ //$$